Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
11 класс

▷ **1.** Наборщик рассыпал некоторое число, представляющее седьмую степень натурального числа. Его цифры: 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6. Восстановить по этим цифрам число.

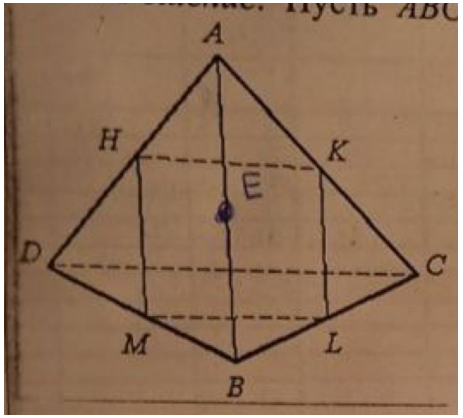
Решение: Седьмая степень натурального числа
$10^{10} < x^7 < 10^{11}$
$10\sqrt[7]{10} < x < 10\sqrt[7]{1000}$
$26 < 10\sqrt[7]{1000} < 27$
$N = 27$
$27^4 = 531441$
$27^3 = 19683$
Проводим операцию умножения и получаем в итоге:
$27^7 = 10460353203$
Для N=36
$36^4 = 1679616$
$36^3 = 46656$
$36^7 = 1679616 \cdot 46656 = \ldots 096$
Операцию умножения не производим, так как вторая цифра с конца будет 9-ка.
Ответ: $27^7 = 10460353203$

▷ **2.** Используя все цифры от 1 до 9, составить три трёхзначных числа с наибольшим возможным произведением.

Решение: $941 * 852 * 763$
Ответ: 683519816

▷ **3.** Правильный тетраэдр разделили плоскостью на две части так, что в сечении получился единичный квадрат. Найдите объём шара, вписанный в этот тетраэдр и отношение объёмов полученных тел.

Решение: Пусть ABCD - правильный тетраэдр (см. рисунок ниже). Проведем в ABC и ABD средние линии KL и MN. Обе они параллельные ребру AB, а значит друг другу, т. е. параллельны и лежат в одной плоскости, которая пересекает тетраэдр по четырехугольнику NKLM. Покажем, что он и есть искомый квадрат.



Сначала заметим, что все четыре его стороны средние линии равных правильных треугольников - граней тетраэдра. Поэтому они равны между собой, т. е. KLMN - ромб. Стороны его паралелльны ребрам AB и CD тетраэдра. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что прямые AB и CD перпендикулярны. Для этого обозначим середину ребра AB через E и заметим, что прямая AB перпендикулярная плоскости CDE, т. к. перпендикулярная лежащим в ней пересекающимся прямым CE и DE. Потому она перпендикулярная и лежащей в плоскости CDE прямой CD.

$$V_1 : V_2 = 1 : 1$$

$$HK = 1 => AD = 2 = a$$

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}, S_{\text{п.п.}} = a^2\sqrt{3}, r = \frac{3V}{S_{\text{п.п.}}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4 \cdot a^2\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{12}$$

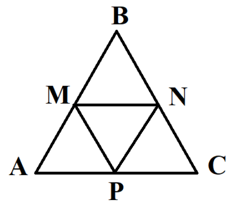
$$r = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{9 \cdot 6} = \frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{27}$$

Ответ: $\frac{\pi * \sqrt{6}}{27}$

▷ **4.** Внутри правильного треугольника случайно бросили точку O. Пусть a, b, c - длины отрезков, равные расстоянию от точки O до сторон этого угла. Найдите вероятность того, что из отрезков a,b,c можно построить треугольник.

Решение:



Перпендикуляр, опущенный на AC из любой точки, лежащей внутри треугольника MBN (M,N,P середины AB , BC, AC - соответсвенно), будет больше $\frac{H}{2}$, а опущенный из точки, лежащей на MN, равен $\frac{H}{2}$. Следовательно, все эти точки не удовлетворяют условию задачи. Аналогичный вывод по отношению к точкам, лежащим внутри треугольников MAP и PCN, а также к лежащим на MP и NP.
Наоборот, по отношению к любой точке O, лежащей внутри треугольника MNP, имеем (предположив, что OB_1 наибольший из перпендикуляров, что не уменьшает общности)

$$OA_1 + OB_1 = H - OB_1$$

и так как $OB_1 < \frac{H}{2}$, то

$$OA_1 + OC_1 > H - \frac{H}{2} = \frac{H}{2},$$

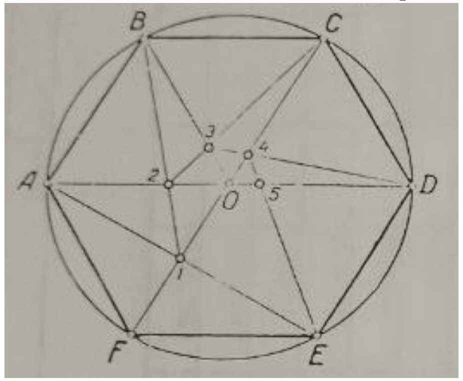
$$OA_1 + OC_1 > OB_1$$

$$P = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

Ответ: 0,25.

▷ **5.** В круг радиуса 2023 вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить отрезок длиною 1.

Решение: Дан правильный шестиугольник ABCDEF
1. Проводим AD
2. Проводим CF
3. Проводим AL. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$
4. Проводим B1. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$, это следует из подобия трегуольников B1C и 21O
$\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}$
5. Проводим BO.
6. Проводим C2. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.



7. Проводим D3. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.
8. Проводим E4. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$ и т.д.
Доказательство везде основывается на подобии треугольников.
Ответ:

▷ **6.** Если A, B, C - углы остроугольного треугольника, то какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{\operatorname{tg}^{2023} A + \operatorname{tg}^{2023} B + \operatorname{tg}^{2023} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

Решение: Известно, что $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B$$

Если $A + B + C = 180$, то $\operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg} C$

$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \le 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}$, тогда $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \le 3^{\frac{3}{2}}$

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \le 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n A \cdot \operatorname{tg}^n B \cdot \operatorname{tg}^n C}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \le 3(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^{\frac{n}{3}-1} = 3(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{n}{3}-1} = 3^{1011}$$

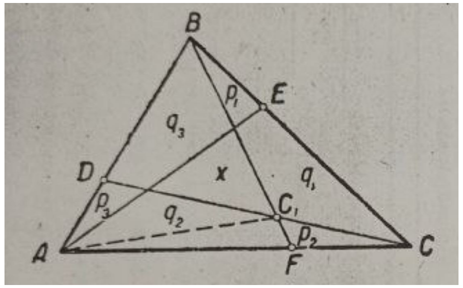
Ответ: 3^{1011}.

▷ **7.** Точками E, F и D каждая из сторон треугольника ABC разделена в отношении $m : n$. Найти отношение площади треугольника, образованного прямыми AE, BF и CD к площади данного треугольника.

Решение: Согласно условию

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{m}{n} = k$$

Обозначим искомую площадь через x, а площади треугольников и четырехугольников, на которые разбитывается прямыми AE, BF, CD данный треугольник, соответственно через p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3.



Из равновеликости треугольников BAE и CBD следует, что

$$p_2 + q_3 = p_2 + q_1 \qquad [2]$$

Точно так же из равновеликости треугольников BAE и ACD:

$$P_2 + q_2 = p_1 + q_3 v \qquad [3]$$

На основани эе теоремы о треугольниках, которые имеют общую вершину, найдем что

$$\frac{S_{AC_1D}}{S_{DC_1B}} = \frac{m}{n} = k$$

Отсюда:

$$S_{AC_1D} = k(x + q_3) \qquad [4]$$

На том же основании:

$$S_{AC_1F} = \frac{1}{k}p_2 \qquad [5]$$

$$S_{AC_1D} = q_2 + p_2 - S_{AC_1F} = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2 \qquad [6]$$

Из [4] и [6] получаем:

$$k(x + q_3) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2 \qquad [7]$$

Совершенно аналогично найдем:

$$k(x + q_1) = p_1 + q_2 - \frac{1}{k}p_3 \qquad [8]$$

Исключим x из [7] и [8] путев вычитания и получаем следующее:

$$k(q_2 - q_1) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2 - p_1 - q_3 + \frac{1}{k}p_3 \qquad [9]$$

или

$$k^2q_3 - k^2q_1 = kp_3 + k(q_2 - p_1) + (p_3 - p_2) - kq_3$$

Но из (2) и (3) имеем:

$$q_2 - p_1 = q_3 - p_2 p_3 - p_2 = q_1 - q_3$$

После подстановки получим:

$$k^2q_3 - k^2q_1 = k(p_3 + q_3 - p_2) + q_1 - q_3 - kq_2$$

Наконец, приняв во внимание [2].

$$k^2q_3 - k^2q_3 = kq_1 + q_1 - q_3 - kq_2$$

или

$$k^2q_3 + kq_3 + q_3 = k^2q_1 + kq_1 + q_1$$

Но отсюда непосредственно следует:

$$q_3 = q_1$$

А тогда из [2]:

$$p_3 = p_2$$

Совершенно аналогично найдем, что

$$q_2 = q_3$$

а тогда из [3], что

$$p_1 = p_2$$

А тогда из [3], что

$$p_1 = p_2$$

и, следовательно, в итоге имеем:

$$p_1 = p_2 = p_3 = pq_1 = q_2 = q_3 = q$$

Выразим площадь треугольника S треугольника ABC через p и q и через площадь x искомого треугольника. Будем иметь:

$$x + 3p + 3q = S$$

С другой стороны соотношения

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{AB} = k$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DB} = k$$

p и q:

$$2p + q = k(x + p + 2q)$$

$$p + q - \frac{p}{k} = k(x + q)$$

или

$$(2 - k)p + (1 - 2k)q = kx$$

$$(k - 1)p + (k - k^2)q = k^2 x$$

Решив эту систему, найдем:

$$p = \frac{k^3 x}{(k-1)^2(k+1)} q = \frac{(k + k^2 - k^2)x}{(k-1)^2(k+1)}$$

Подставив полученные значения в [8]:

$$x = \frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1} = \frac{(m-n)^3}{m^3 - n^3}$$

Ответ: $\frac{(m-n)^3}{m^3-n^3}$

▷ **8.** Доказать, что в каждой бесконечной десятичной дроби существует последовательность десятичных знаков произвольной длины, которая в разложении дроби встречается бесконечно много раз.

Решение: Пусть m - произвольное заданное натуральное число. Разобьём данную бесконечную дробь, по m цифр в каждом. Таких отрезков будет бесконечно много. С другой стороны, число систем из m цифр равно числ упорядоченных m-выборок из (10)-множества, $A^m_{(10)} = 10^m$, т.е. конечное число. Следовательно, хотя бы одна из этих систем должна повторяться бесконечно много раз.

▷ **9.** Найти шестизначные числа такие, что: $\overline{xyznut} = (\overline{xyz} + \overline{nut})^2$.

Решение: Обозначим:

$$\overline{xyz} = M \quad \text{и} \quad \overline{nut} = N.$$

По условию:

$$1000M + N = (M + N)^2$$

Отсюда:

$$999M = (M + N)^2 - (M + N) = (M + N)(M + N + 1). \tag{1}$$

Так как $M + N$ и $M + N - 1$ два соседних натуральных числа, то они взаимно простые. Число $999 = 27 \cdot 37$. Отсюда можно сделать такие предположения:

$$M + N = 999. \tag{2}$$

(Точнее, $M + N = 999k$, но легко показать, что k может быть рано только 1). Тогда

$$M + N - 1 = 998.$$

и из (1)

$$M = \frac{999 \cdot 998}{999} = 998.$$

Следовательно, из (2)

$$N = 1.$$

и искомое число равно

$$998001 = (998 + 001)^2.$$

$$M + N = 27m;\; M + N - 1 = 37n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$27m = 37n + 1.$$

Решив это неопределённое уравнение в целых положительных числах, найдём:

$$m = 11 + 37t; \quad n = 8 + 27t.$$

Но

$$M = mn = (11 + 37t)(8 + 27t) < 1000.$$

Следовательно, $t = 0$ (так как уже при $t = 1$ имеем $48 \cdot 35 > 1000$). Значит:

$$M = 11 \cdot 8 = 88.$$

Это значение M не годится, так как M по условию число трёхзначное.

$$M + N = 37m; \quad M + N - 1 = 27n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$37m = 27n + 1.$$

Это уравнение даёт

$$m = 19 + 27t; \quad n = 26 + 37t,$$

и так как (аналогично предыдщему) $t = 0$, то имеем:

$$m = 19; \quad n = 26.$$

$$M = mn = 19 \cdot 26 = 494;$$

$$M + N = 37 \cdot m = 37 \cdot 19 = 703;$$

$$N = 703 - 494 = 209.$$

Искомое число:

$$494209 = (494 + 209)^2.$$

Предположение $M + N - 1 = 999k$ не годится, так как уже при $k = 1$ получим $M + N = 1000$ и из (1) $M = 1000$ - четырёхзначное (хотя второе условие задачи имеет место).
Итак, имеем два числа

$$998001 \quad \text{и} \quad 494209.$$

удовлетворяющие условию задачи.

▷ **10.** Пусть координаты вектора $\overrightarrow{l}(x, y, z, w)$ удовлетворяют трём условиям. Найдите все натуральные значения, которые может принимать $|\overrightarrow{l}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 6y + 12 \\ z^2 + w^2 + 8z = 2w + 19 \\ xw + zy + 2w + 4y \geqslant 44 + x + 3z \end{cases}$$

Решение: Пребразуем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ (z+4)^2 + (w-1)^2 \\ (w-1)(x+2) + (z+4)(y-3) \geqslant 30 \end{cases}$$

$$30\cos\phi\sin\psi + 30\sin\phi\cos\psi \geqslant 30$$

$$\begin{cases} x + 2 = 5\cos\phi \\ y - 3 = 5\sin\phi \\ z + 4 = 6\cos\psi \\ w - 1 = 6\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi \leqslant 360^\circ \\ 0 \leqslant \psi \leqslant 360^\circ \end{cases}$$

$$\sin(\phi + \psi) \geqslant 1$$
$$\phi + \psi = 90^\circ + 360^\circ n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 - 20\cos\phi + 25\cos^2\phi + 9 + 30\sin\phi +$$
$$+ 25\sin^2\phi + 16 - 48\cos\psi + 36\cos^2\psi + 1 + 12\sin\psi + 36\sin^2\psi =$$
$$= 91 - 20\cos\phi + 30\sin\phi - 48\cos\psi + 12\sin\psi$$

$$\cos\psi = \cos(90^\circ - \phi + 360^\circ n) = \sin\phi; \quad \sin\psi = \sin(90^\circ - \phi + 360^\circ n) = \cos\phi$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = 91 - 8\cos\phi - 18\sin\phi = 91 - \sqrt{8^2 - 18^2}\{\sin\alpha\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi\} =$$

$$91 - \sqrt{388}\sin(\alpha + \phi)$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{388}} = \frac{4}{\sqrt{97}}; \ \cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{97}}$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = 91 - \sqrt{388}\sin(\alpha + \phi) \in [91 - \sqrt{388}; \ 91 + \sqrt{388}]$$
$$91 - \sqrt{388} \in (71; 72) \quad 91 + \sqrt{388} \in (110; 111)$$

$$\sqrt{91 - \sqrt{388}} \in (8; 9) \quad \sqrt{91 + \sqrt{388}} \in (10; 11)$$

Ответ: $|l| \in \{9; 10\}$